Tentamen Calculus 2

31 oktober 2007, 14.00-17.00 uur.

Per opgave zijn maximaal 1,5 punten te behalen. Totaal: 9 + 1 (gratis) punten.
Het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan. Echter, antwoorden die uitsluitend m.b.v. de grafische rekenmachine verkregen zijn, worden niet goed gerekend: Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes!

1. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert indien aan de volgende drie voorwaarden is voldaan:

   1. de reeks alterneert, d.w.z. op een volgende termen hebben een verschillend teken;
   2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;
   3. $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ voor alle n.

   Laat aan de hand van tegenvoorbeelden zien dat de voorwaarden 1. en 2. niet gemist kunnen worden. M.a.w. geef (zonder bewijs) een divergente reeks die

   (a) niet aan 1. maar wel aan 2. en 3. voldoet;

   (b) niet aan 2. maar wel aan 1. en 3. voldoet.

2. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n}$$

   (a) Bepaal de convergentiestraal R.

   (b) Bepaal alle (reële) x waarvoor de bovenstaande machtreeks convergeert.

3. De functie f wordt gegeven door

$$f(x,y) = \frac{\sin\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}$$

   waarbij $(x,y) \neq (0,0)$.

   (a) Toon aan dat

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

   niet bestaat.

   (b) Bereken de partiële afgeleiden f_x en f_y (voor $(x,y) \neq (0,0)$).

   (c) Bereken de richtingsafgeleide van f in het punt $(x,y) = (1,1)$ in de richting van de vector $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

   (d) Beschouw het punt $(x,y) = (1,1)$. In welke richting stijgt f het snelst?

z.o.z.

4. (a) Vul aan de volgende definitie aan:
   Zij $z = f(x, y)$ een differentieerbare functie van twee onafhankelijke variabelen x en y. De (totale) differentiaal dz wordt gedefinieerd door .....

   NB. de (totale) differentiaal wordt ook wel df genoemd. In het vervolg zullen we deze notatie gebruiken. Verder is R is een constante.

   (b) Bepaal alle functies $V(p, T)$ waarvoor de (totale) differentiaal wordt gegeven door

$$dV = \frac{R}{p}dT - \frac{RT}{p^2}dp$$

   (c) Bereken de lijnintegraal

$$\int_C \left(\frac{R}{p}dT - \frac{RT}{p^2}dp \right)$$

   waarbij C het rechte lijnstuk in het $p - T-$vlak is dat loopt van het punt $(p, T) = (1, 1)$ naar het punt $(p, T) = (2, 1)$.

5. Beschouw de integraal

$$\iint\limits_S (y - x)^2 \sin(x + y) dx dy, \tag{1}$$

   waarbij het integratie-gebied S een parallelogram in het xy-vlak is met hoekpunten $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ en $(0, \pi)$.

   (a) Schets het integratie-gebied S.

   De termen $y - x$ en $x + y$ in de integrand suggereren de volgende coördinaat-transformatie

$$u = y - x \qquad \text{en} \qquad v = x + y.$$

   (b) Bereken de Jacobiaan van deze coördinaat-transformatie.

   (c) Beschrijf het gebied S in termen van de nieuwe coördinaten u en v.

   (d) Bereken de integraal (1).

6. Een boei drijft op het water. Wanneer de boei een stukje onder water wordt geduwd gaat deze vervolgens op en neer bewegen. De uitwijking t.o.v. van de rust toestand duiden we aan door $x(t)$; t is de tijd. De uitwijking voldoet aan de d.v.

$$100x'' = -16\pi x - cx'$$

   waarbij c een constante is.

   (a) Los de karakteristieke vergelijking die bij de bovenstaande d.v. hoort op.

   (b) Aan welke voorwaarde moet c voldoen opdat $x(t)$ een periodieke functie is?

   (c) Hoe luidt de periodieke oplossing indien $x(0) = 1$ en $x'(0) = 0$?